FACHBEREICH MATHEMATIK

Inhalte und Kompetenzen

Arithmetik

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Algebra	Sicherheit im Umgang mit Termumformungen, Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen	Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten; quadratische Gleichungen und ihre Lösungen; Rechnen mit Potenzen; Anwendungen in einfachen Textaufgaben
(Lineare) Funktionen	Funktionsbegriff verstehen; (Anti-) Proportionalität und lineare Funktionen mit Spezialfällen kennen und anwenden	Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung; verschiedene Darstellungsformen von Funktionen (Funktionsgleichung, Wertetabelle, Koordinatensystem); Proportionalität und Antiproportionalität; anwendungsbezogene Beispiele von Funktionen; Steigung und Achsenabschnitte einer linearen Funktion; lineare Funktionsgleichung aus zwei Punkten; Schnitt zweier Geraden; Textaufgaben
Quadratische Funktionen	Quadratische Funktionen kennen und anwenden	Grafische Darstellung von Parabeln; Bestimmung von Nullstellen und Scheitel; einfache Extremwertaufgaben
Kombinatorik	Bei geringer Anzahl von Möglichkeiten: diese systematisch und vollständig aufzählen; bei grosser Anzahl von Möglichkeiten: entsprechende Formeln anwenden	Baumdiagramme mit Pfadregeln; Urnenmodelle; geordnete und ungeordnete Stichproben mit und ohne Wiederholung; $n!$, n^k; $n!/(n-k)!$; $n!/[k!(n-k)!]$
Wahrscheinlichkeit	Begriff der Wahrscheinlichkeit erfassen; Wahrscheinlichkeiten in einfachen Experimenten berechnen	Begriffe Zufallsexperimente, Ergebnisraum, Wahrscheinlichkeit; sicheres/ unmögliches Ereignis; Gegenereignis; bei Gleichverteilung: P = (Anzahl günstige Fälle):(Anzahl mögliche Fälle); Bernoulli-Experimente; Binomialverteilung
Statistik	Statistiken lesen; Datenerhebung, Auswertung und geeignete Darstellung der Ergebnisse durchführen	Darstellungsformen (z.B. Tabelle, Stabdiagramm, Kreisdiagramm); Mittelwert; Erwartungswert; Standardabweichung
Exponentialfunktionen	Unterschied zwischen linearen und exponentiellem Wachstum erkennen und Berechnungen durchführen	Zins und Zinseszins; Exponentialgleichungen vom Typ $a = b^x$; exponentielles Wachstum: ermitteln des Wachstumsfaktors oder der Zeit bis ein bestimmtes Wachstum erreicht ist; Bakterienvermehrung; Radioaktiver Zerfall; Halbwertszeit
Folgen und Reihen	Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen berechnen und anwenden	Rekursive und explizite Bildungsvorschriften; Berechnung des n-ten Gliedes; Summenformel für die n-te Teilsumme der arithmetischen und geometrischen Reihe

Geometrie

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Stereometrie	Oberflächen und Volumina geometrischer Körper berechnen können	Volumen und Oberfläche von Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel
Trigonometrie	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck kennen und anwenden	Definition von sin, cos, tan als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck und im Einheitskreis; $\sin \quad = \cos (90° - \quad)$; $\sin^2 \quad + \cos^2 \quad = 1$; $\tan \quad = \sin \quad / \cos \quad$; Grafische Darstellung der Funktionen im Bereich 0° bis 90°; Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck und praktische Anwendungen

Eintrittsvoraussetzungen (erwartetes Vorwissen)

Arithmetik

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Mengen	Die wichtigsten Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre kennen; Zahlenmengen kennen	Mengen und ihre Elemente, Teilmenge, leere Menge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Differenzmenge; Darstellung im Mengendiagramm; natürliche, ganze und rationale Zahlen
Algebra	Sicherer Umgang mit einfachen Rechnungen und Termumformungen; Lösung von einfachen (Un-)Gleichungen	Rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen (Dezimal- und echte Brüche); Rechnen mit einfachen Potenzen und Wurzeln; Termumformungen, binomische Formeln und Faktorzerlegungen; grösster gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches; Gleichungen und Ungleichungen ersten Grades mit einer Variablen lösen; Gleichungen zu gegebenen Situationen aufstellen, lösen und interpretieren; Umgang mit Grössen und Einheiten (Zeiten, Längen, Flächen, Volumina, …)
Funktionen	Grafische Darstellung von Funktionen	Funktionsdarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem und Interpretation eines Graphen

Geometrie

Bereich	*Kompetenzen*	*Inhalte*
Satz des Pythagoras	Satz des Pythagoras in zwei- und dreidimensionalen Figuren anwenden können	Anwendung des Satzes des Pythagoras in praktischen Aufgaben; Raumdiagonale im Würfel und Quader bei gegebener Länger der Seitenkanten
Planimetrie, Stereometrie	Eigenschaften ebener Figuren kennen und Berechnungen durchführen; Konstruktionen von Drei- und Vierecken; Oberflächen und Volumina einfacher Körper berechnen	Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken mit Spezialfällen; Konstruktionen von Dreiecken und Vierecken mit Zirkel und Lineal; Umfang und Flächeninhalt von Dreieck, Viereck und Kreis Berechnung von Oberflächen und Volumina einfacher Körper, wie z.B. Würfel oder Quader
Strahlensätze	Strahlensätze und den Begriff der Ähnlichkeit kennen und anwenden	Erster und zweiter Strahlensatz in praktischen Aufgaben anwenden; Begriff Streckungsfaktor und zentrische Streckung kennen und anwenden; ähnliche Figuren erkennen

Rahmenbedingungen

Prüfung schriftlich:	180 Minuten
Geprüfte Themen:	Stoffinhalte aus Abschnitt A
Bewertung:	Lösungsweg und Ergebnis
Hilfsmittel:	nicht-programmierbarer Taschenrechner, Formelsammlung

Literaturhinweise

Die oben genannten Inhalte können mit Mathematik-Büchern ihrer Wahl durchgearbeitet bzw. repetiert werden. Folgende Bücher enthalten beispielsweise Kapitel zu den oben erwähnten Inhalten:

- Fundamentum Mathematik und Physik; Formeln, Begriffe, Tabellen…,
  Orell Füssli, 2001; ISBN 3-280-02744-6
- DUDEN Mathematik, Basiswissen Schule
  Buch und CD-ROM in Verbindung mit dem Internet paetec,
  Berlin und Bibliographisches Institut, Mannheim, 2001; ISBN 3-411-71501-4
- Schüler Duden, Die Mathematik I und II
  Dudenverlag, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1990/91;
  ISBN 3-411-04205-2
- Niederberger; Geometrie 1-3
  sabe AG, Zürich, 1998 1990; ISBN 3-252-06077-9; 3-252-06079-5 und
  3-252-06081-7
- Cotter, Durandi, Frei, Schuppli; Arithmetik und Algebra 1–3
  sabe AG, Zürich, 2000; ISBN 3-252-06191-0, 3-252-06194-5 und
  3-252-06097-3
- Deller, Gebauer, Zinn; Algebra 1 und 2
  Orell Füssli, 2000; ISBN 3-280-02795-0 und 3-280-02797-7
- Kusch, Gaida; Algebra und Geometrie, Kurzausgabe B
  Cornelsen Verlag, 1996, ISBN 3-590-82675-4

Beispielaufgaben

Algebra

1. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem: $\left| \begin{array}{c} y = -2{,}5x + 3 \\ x = 0{,}5y \end{array} \right|$
   a) Lösen Sie das Gleichungssystem möglichst exakt zeichnerisch.
   b) Lösen Sie das Gleichungssystem rechnerisch und vergleichen Sie mit a).
2. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge der Gleichung $2y = 7 - \sqrt{4y + 1}$.
3. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 34,56 cm^2, seine Hypothenuse ist 12 cm lang. Wie lang sind die beiden Katheten?
4. Zerlegen Sie die Zahl 24 so in zwei Summanden, dass die Summe der Quadrate der Summanden möglichst klein wird.
5. Fassen Sie so weit wie möglich zusammen (ohne Bruch und Divisionszeichen): $\frac{u^{n+1}}{v^m} \; \frac{v^{m-1}u^n}{\left(u^{-1}v\right)^2}$
6. Auf wie viele Arten kann man 10 verschiedene Gegenstände in einen Setzkasten mit 12 Kästchen verteilen, wenn man sich dafür interessiert, welcher Gegenstand in welchem Kästchen liegt?
7. In einer Urne befinden sich 4 rote und 5 grüne Kugeln. Es werden vier Kugeln mit einem Griff gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine grüne Kugel zu ziehen.
8. Sie setzen beim Roulette auf das Ereignis „ungerade Zahl“. Alle Sektoren der Zahlen 0 bis 36 sind gleich gross. Sie zahlen 10 Franken Einsatz. Ihr Reingewinn beträgt 10 Franken, wenn sie gewinnen. Wenn Sie verlieren, ist ihr Einsatz verloren. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung.
9. Sie kaufen 12 Stück eines Artikels aus Massenproduktion. 85% dieser Artikel sind erste Wahl, der Rest zweite Wahl. Aufgrund der Verpackung kann man nicht erkennen, ob der Artikel erste oder zweite Wahl ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 10 Artikel erste Wahl?

10. Angenommen einer Ihrer Urahnen habe vor 185 Jahren ein seltenes Sammlerstück für 10 Fr. gekauft, welches immer noch in Familienbesitz ist und dessen Wert sich jedes Jahr um 5% erhöht hat.
    a) Wie viel Wert hätte dieses Sammlerstück heute?
    b) Um wie viel Prozent müsste der Wert jährlich zunehmen, damit es heute 500'000 Franken kosten würde?
11. Bestimmen Sie die Halbwertszeit von ‚Kohlenstoff 14', also die Zeitdauer, wie viele Jahre es dauert, bis nur noch die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Menge existiert. Innerhalb eines Jahres nimmt die Menge von ‚Kohlenstoff 14' um 0,012% ab. (Lösungsweg!)
12. (Zahlen-)Folgen: Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Aufzählende Darstellung	Explizite Darstellung	Rekursive Darstellung
3, 8, 13, 18, 23, 28, …		
Die ersten 4 Glieder lauten:	$a_n = (-1)^{n+1} \cdot 5^n$	

13. Berechnen Sie die folgenden Teilsummen, ohne alle Summanden einzeln zu addieren:
    a) $s_n = (-4) + (-1) + 2 + 5 + \ldots + 101$
    b) $s_n = 2 + 4 + 8 + \ldots + 1025$

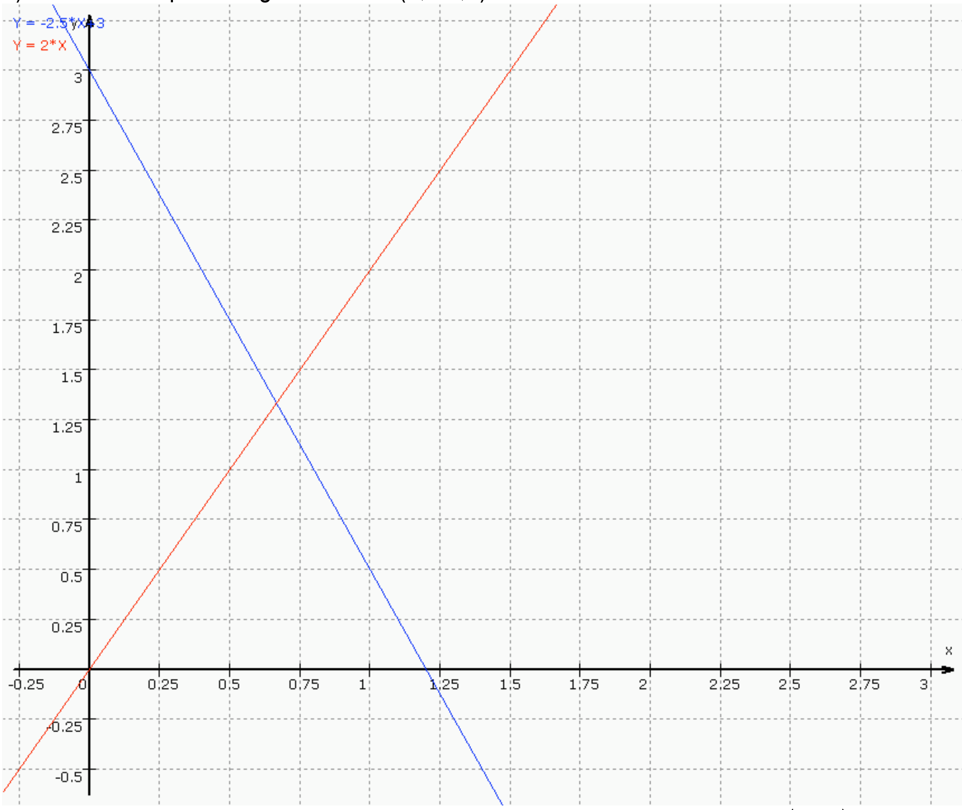
Geometrie

14. Ein kegelförmiger Messbecher ist 20 cm hoch und hat oben den inneren Radius 12 cm. Der Messbecher ist mit einer bestimmten Menge Wasser gefüllt. Markiert man den Wasserstand an der Becherwand, so ist diese Markierung 8 cm vom Fuss des Messbechers entfernt (d.h. der Abstand auf der Mantellinie von der Markierung bis zur Kegelspitze beträgt 8 cm). Wie viel Liter oder Milliliter Wasser befinden sich im Messbecher?
15. Welches Volumen, welchen Durchmesser und welche Oberfläche hat eine Kugel der Masse 10,0 kg aus Glas der Dichte 2,5 g/cm^3?
    Anmerkung: Die Kugel ist nicht hohl, sondern massiv aus Glas.
16. Ein Flugzeug hebt an einem Punkt P auf dem Flughafengelände ab und steigt unter einem gleichmässigen Winkel von 7° an. In welcher Höhe überfliegt das Flugzeug einen 28 km entfernten Punkt Q?
17. Einem Kreis mit dem Radius r = 6 cm ist ein regelmässiges Achteck einbeschrieben. Berechnen Sie dessen Umfang.

Lösungen zu den Beispielaufgaben

1.

a) Der Schnittpunkt liegt etwa bei S(0,7/1,3)



b) Einsetzungsverfahren: y = -2,5(0,5y) + 3 → y = 4/3 → x = 2/3 → L= $\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$

2. $\sqrt{4y+1} = 7-2y$ → $4y+1=(7-2y)^2 = 49-28y+4y^2$ → $0=4y^2-32y+48$
→ Lösungsformel für quadratische Gleichungen
→ $L=\{2\}$ (6 ist keine Lösung der Wurzelgleichung→ Probe!)

3. Es gilt (1) $x^2 + y^2 = 12^2$ und (2) $\frac{xy}{2} = 34{,}56$ → (2) nach y auflösen → Einsetzungsverfahren → $x^4 - 144x^2 + 4777{,}5744 = 0$ → Substitution $z = x^2$ → Lösungsformel und Resubstitution → Die Seiten betragen 9,6 cm und 7,2 cm.

4. $f(x) = x^2 + (24-x)^2 = 2x^2 - 48x + 576 = 2(x-12)^2 + 288$ → S(12/288) → Das Minimum wird angenommen, wenn die Zahl 24 in 12 +12 zerlegt wird und beträgt 288.

5. $u^{2n+3}v^{-3}$

6. $\frac{12!}{(12-10)!} = 239500800$ Möglichkeiten

7. $1-\frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = 1-\frac{1}{126} = \frac{125}{126}$

8. E(X) = $-10\cdot\frac{19}{37}+10\cdot\frac{18}{37} = -\frac{10}{37}$

V(X) = $\left(-10+\frac{10}{37}\right)^2\cdot\frac{19}{37}+\left(10+\frac{10}{37}\right)^2\cdot\frac{18}{37} \approx 99{,}927$ → $\sqrt{v(x)} \approx 9{,}996$

9. $\binom{12}{10}\cdot 0{,}85^{10}\cdot 0{,}15^2$= 0,292 → ca. 29,2% Wahrscheinlichkeit

10.

a) $10\cdot 1{,}05^{185} = 83180{,}27$ Fr. ≈ 83180,25 Fr.

b) $500000 = 10\cdot a^{185}$ → a = 1,06023 → um ca. 6%

11. Wachstumsfaktor: a = 0,99988 → $0{,}99988^x = 0{,}5$ → x = log(0,5)/log(0,99988) = 5775,88 → etwa 5776 Jahre

12.

Aufzählende Darstellung	Explizite Darstellung	Rekursive Darstellung
3, 8, 13, 18, 23, 28, …	$a_n = 3 + 5(n - 1) = 5n - 1$	$a_{n+1} = a_n + 5;\ a_1 = 3$
Die ersten 4 Glieder lauten: 5, -25, 125, -625	$a_n = (-1)^{n+1} \cdot 5^n$	$a_{n+1} = a_n \cdot (-5);\ a_1 = 5$

13.

a) Aus $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ folgt: $101 = -4 + (n - 1) \cdot 3$ → $n = 36$
→ $s_{36} = 36/2 \cdot (-4 + 101) = 1746$

b) Aus $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ und $a_1 = 2$ und $q = 2$ folgt: $s_{10} = 2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2046$

14. s = 23,32 cm → Strahlensatz: $s/r = s_1/r_1$ → $23{,}32/12 = 8/r_1$ → $r_1 = 4{,}12$ cm
→ $h_1 = 6{,}86$ cm → V = 121,7 cm^3 → 121,7 ml
15. V = 4000 cm^3; d = 19,69 cm; O = 1218,59 cm^2
16. tan7° = h/28000 m → h = 3438 m
17. Wenn man vom Kreismittelpunkt zu jeder Ecke des Achtecks den Radius einzeichnet, so entstehen 8 gleichschenklige Dreiecke mit dem Mittelpunktswinkel 45°. Zeichnet man die Höhe zur Basis in eines dieser Dreiecke ein, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke und der Mittelpunktswinkel wird halbiert auf 22,5°.
→ sin 22,5° = x/6 → x = 2,3 cm (halbe Achteckseite) → U = 36,74 cm.

Kontaktperson

Christoph Eckhardt
christoph.eckhardt@pmstg.ch