

FACHBEREICH MATHEMATIK

A Stoffprogramm

Arithmetik

| <i>Bereich</i> | <i>Kompetenzen</i> | <i>Inhalte</i> |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Algebra | Sicherheit im Umgang mit Termumformungen, Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen | Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten; quadratische Gleichungen und ihre Lösungen (auch Bruch-, Wurzel- und biquadratische Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen); Rechnen mit Potenzen und Wurzeln; Anwendungen in einfachen Textaufgaben |
| (Lineare) Funktionen | Funktionsbegriff verstehen; (Anti-) Proportionalität und lineare Funktionen mit Spezialfällen kennen und anwenden | Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung; verschiedene Darstellungsformen von Funktionen (Funktionsgleichung, Wertetabelle, Koordinatensystem); Proportionalität und Antiproportionalität; anwendungsbezogene Beispiele von Funktionen; Steigung und Achsenabschnitte einer linearen Funktion; lineare Funktionsgleichung aus zwei Punkten; Schnitt zweier Geraden; Textaufgaben |
| Quadratische Funktionen | Quadratische Funktionen kennen und anwenden | Grafische Darstellung von Parabeln; Bestimmung von Nullstellen und Scheitel; einfache Extremwertaufgaben |
| Kombinatorik | Bei geringer Anzahl von Möglichkeiten: diese systematisch und vollständig aufzählen; bei grosser Anzahl von Möglichkeiten: entsprechende Formeln anwenden | Baumdiagramme mit Pfadregeln; Urnenmodelle; geordnete und ungeordnete Stichproben mit und ohne Wiederholung; $n!$, n^k , $n!/(n-k)!$; $n!/k!(n-k)!$ |
| Wahrscheinlichkeit | Begriff der Wahrscheinlichkeit erfassen; Wahrscheinlichkeiten in einfachen Experimenten berechnen | Begriffe Zufallsexperimente, Ergebnisraum, Wahrscheinlichkeit; sicheres/ unmögliches Ereignis; Gegenereignis; bei Gleichverteilung: $P = (\text{Anzahl günstige Fälle}) : (\text{Anzahl mögliche Fälle})$; Bernoulli-Experimente; Binomialverteilung |
| Statistik | Statistiken lesen; Datenerhebung, Auswertung und geeignete Darstellung der Ergebnisse durchführen | Darstellungsformen (z.B. Tabelle, Stabdiagramm, Kreisdiagramm); Mittelwert; Erwartungswert; Standardabweichung |
| Exponentialfunktionen | Unterschied zwischen linearen und exponentiellem Wachstum erkennen und Berechnungen durchführen | Zins und Zinseszins; Exponentialgleichungen vom Typ $a = b^x$; exponentielles Wachstum: ermitteln des Wachstumsfaktors oder der Zeit bis ein bestimmtes Wachstum erreicht ist; Bakterienvermehrung; Radioaktiver Zerfall; Halbwertszeit |

Geometrie

| <i>Bereich</i> | <i>Kompetenzen</i> | <i>Inhalte</i> |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stereometrie | Oberflächen und Volumina geometrischer Körper berechnen können | Volumen und Oberfläche von Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel |
| Trigonometrie | Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck kennen und anwenden | Definition von \sin , \cos , \tan als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck und im Einheitskreis; $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$; $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$; Grafische Darstellung der Funktionen im Bereich 0° bis 90° ; Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck und praktische Anwendungen |

B Eintrittsvoraussetzungen (erwartetes Vorwissen)

Arithmetik

| <i>Bereich</i> | <i>Kompetenzen</i> | <i>Inhalte</i> |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mengen | Die wichtigsten Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre kennen; Zahlenmengen kennen | Mengen und ihre Elemente, Teilmenge, leere Menge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, Differenzmenge; Darstellung im Mengendiagramm; natürliche, ganze und rationale Zahlen |
| Algebra | Sicherer Umgang mit einfachen Rechnungen und Termumformungen; Lösung von einfachen (Un-)Gleichungen | Rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen (Dezimal- und echte Brüche); Rechnen mit einfachen Potenzen und Wurzeln; Termumformungen, binomische Formeln und Faktorerlegungen; grösster gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches; Gleichungen und Ungleichungen ersten Grades mit einer Variablen lösen; Gleichungen zu gegebenen Situationen aufstellen, lösen und interpretieren; Umgang mit Grössen und Einheiten (Zeiten, Längen, Flächen, Volumina, ...) |
| Funktionen | Grafische Darstellung von Funktionen | Funktionsdarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem und Interpretation eines Graphen |

Geometrie

| <i>Bereich</i> | <i>Kompetenzen</i> | <i>Inhalte</i> |
|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Satz des Pythagoras | Satz des Pythagoras in zwei- und drei-dimensionalen Figuren anwenden können | Anwendung des Satzes des Pythagoras in praktischen Aufgaben; Raumdiagonale im Würfel und Quader bei gegebener Längen der Seitenkanten |
| Planimetrie, Stereometrie | Eigenschaften ebener Figuren kennen und Berechnungen durchführen; Konstruktionen von Drei- und Vierecken; Oberflächen und Volumina einfacher Körper berechnen | Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken mit Spezialfällen; Konstruktionen von Dreiecken und Vierecken mit Zirkel und Lineal; Umfang und Flächeninhalt von Dreieck, Viereck und Kreis Berechnung von Oberflächen und Volumina einfacher Körper, wie z.B. Würfel oder Quader |
| Strahlensätze | Strahlensätze und den Begriff der Ähnlichkeit kennen und anwenden | Erster und zweiter Strahlensatz in praktischen Aufgaben anwenden; Begriff Streckungsfaktor und zentrische Streckung kennen und anwenden; ähnliche Figuren erkennen |

C Rahmenbedingungen

| | |
|----------------------|-------------------------------------------------------|
| Prüfung schriftlich: | 120 Minuten |
| Geprüfte Themen: | Stoffinhalte aus Abschnitt A |
| Bewertung: | Lösungsweg und Ergebnis |
| Hilfsmittel: | nicht-programmierbarer Taschenrechner, Formelsammlung |

D Literaturhinweise

Alle TeilnehmerInnen des AbS müssen keine Bücher anschaffen. Sie bekommen die Unterrichtsmaterialien gestellt. Für alle diejenigen, welche sich selbständig auf die Aufnahmeprüfung vorbereiten wollen gilt folgende Regelung: Die oben genannten Inhalte können mit Mathematik-Büchern bzw. Lehrmitteln ihrer Wahl durchgearbeitet bzw. repetiert werden. Folgende Bücher enthalten beispielsweise Zusammenfassungen zu einer Vielzahl der oben erwähnten Inhalte:

- Formelsammlung Mathematik. Gymnasium; Klett, 2005; ISBN: 978-3-12-718510-2
- Duden. Schülerduden. Mathematik 1: Das Fachlexikon von A-Z für die 5. bis 10. Klasse von Bibliographisches Institut, Mannheim (3. Februar 2011), ISBN 978-3411042098
- Duden Basiswissen Mathematik: 5. bis 10. Klasse von Günther Rolles und Michael Unger von Bibliographisches Institut, Mannheim (19. August 2010), ISBN 978-3411715046
- Duden. Schülerduden. Mathematik 2: Ein Lexikon zur Schulmathematik für das 11. bis 13. Schuljahr. Rund 1000 Stichwörter... von Harald Scheid und Dieter Kindinger von Bibliographisches Institut, Mannheim (1. Januar 2004), ISBN 978-3411042753
- PONS Das Große Übungsbuch Mathematik, 5. - 10. Klasse: Der komplette Lernstoff in 900 Übungen von Unbekannt von Klett (Juni 2011), ISBN 978-3125617971

E Beispielaufgaben

Algebra

- Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:
$$\begin{cases} y = -2,5x + 3 \\ x = 0,5y \end{cases}$$
 - Lösen Sie das Gleichungssystem möglichst exakt zeichnerisch.
 - Lösen Sie das Gleichungssystem rechnerisch und vergleichen Sie mit a).
- Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge der Gleichung $2y = 7 - \sqrt{4y + 1}$.
- Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt $34,56 \text{ cm}^2$, seine Hypotenuse ist 12 cm lang. Wie lang sind die beiden Katheten?
- Zerlegen Sie die Zahl 24 so in zwei Summanden, dass die Summe der Quadrate der Summanden möglichst klein wird.
- Fassen Sie so weit wie möglich zusammen (ohne Bruch und Divisionszeichen): $\frac{u^{n+1}}{v^m} \cdot \frac{v^{m-1}u^n}{(u^{-1}v)^2}$
- Schreiben Sie mit einem Wurzelzeichen und ohne negative Exponenten: $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a}}}$
- Auf wie viele Arten kann man 10 verschiedene Gegenstände in einen Setzkasten mit 12 Kästchen verteilen, wenn man sich dafür interessiert, welcher Gegenstand in welchem Kästchen liegt?
- In einer Urne befinden sich 4 rote und 5 grüne Kugeln. Es werden vier Kugeln mit einem Griff gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine grüne Kugel zu ziehen.
- Sie setzen beim Roulette auf das Ereignis „ungerade Zahl“. Alle Sektoren der Zahlen 0 bis 36 sind gleich gross. Sie zahlen 10 Franken Einsatz. Ihr Reingewinn beträgt 10 Franken, wenn sie gewinnen. Wenn Sie verlieren, ist ihr Einsatz verloren. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung.
- Sie kaufen 12 Stück eines Artikels aus Massenproduktion. 85% dieser Artikel sind erste Wahl, der Rest zweite Wahl. Aufgrund der Verpackung kann man nicht erkennen, ob der Artikel erste oder zweite Wahl ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 10 Artikel erste Wahl?
- Angenommen einer Ihrer Urahnen habe vor 185 Jahren ein seltenes Sammlerstück für 10 Fr. gekauft, welches immer noch in Familienbesitz ist und dessen Wert sich jedes Jahr um 5% erhöht hat.
 - Wie viel Wert hätte dieses Sammlerstück heute?
 - Um wie viel Prozent müsste der Wert jährlich zunehmen, damit es heute $500'000$ Franken kosten würde?
- Bestimmen Sie die Halbwertszeit von ‚Kohlenstoff 14‘, also die Zeitdauer, wie viele Jahre es dauert, bis nur noch die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Menge existiert. Innerhalb eines Jahres nimmt die Menge von ‚Kohlenstoff 14‘ um $0,012\%$ ab. (Lösungsweg!)

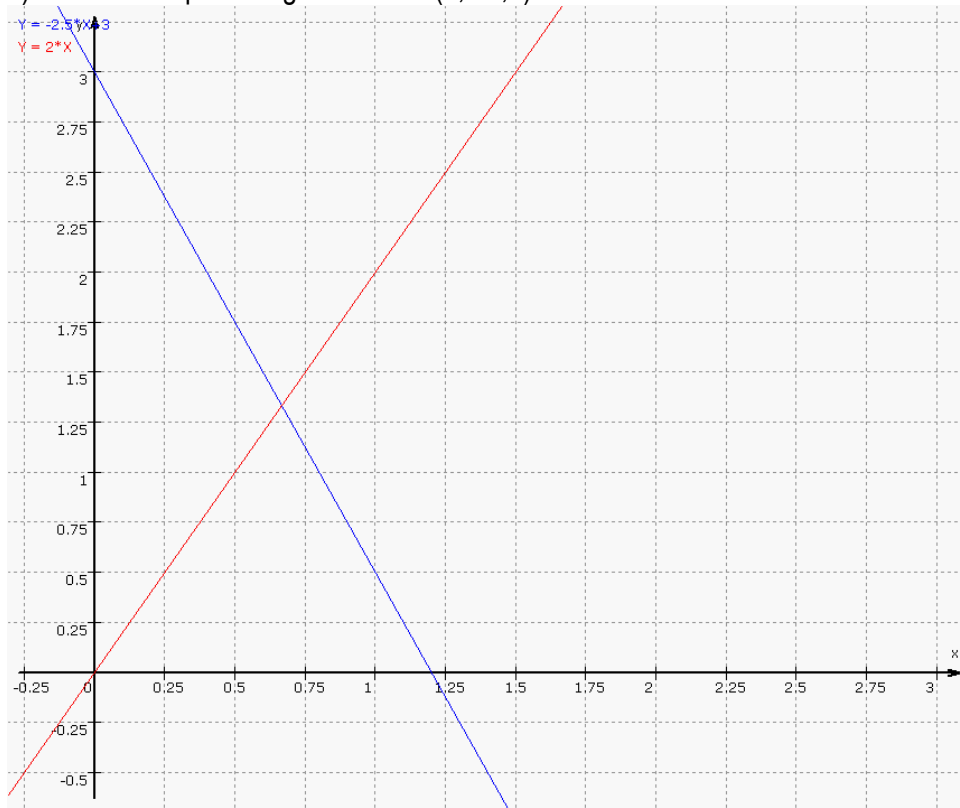
Geometrie

- Ein kegelförmiger Messbecher ist 20 cm hoch und hat oben den inneren Radius 12 cm . Der Messbecher ist mit einer bestimmten Menge Wasser gefüllt. Markiert man den Wasserstand an der Becherwand, so ist diese Markierung 8 cm vom Fuss des Messbechers entfernt (d.h. der Abstand auf der Mantellinie von der Markierung bis zur Kegelspitze beträgt 8 cm). Wie viel Liter oder Milliliter Wasser befinden sich im Messbecher?
- Welches Volumen, welchen Durchmesser und welche Oberfläche hat eine Kugel der Masse $10,0 \text{ kg}$ aus Glas der Dichte $2,5 \text{ g/cm}^3$?
Anmerkung: Die Kugel ist nicht hohl, sondern massiv aus Glas.
- Ein Flugzeug hebt an einem Punkt P auf dem Flughafengelände ab und steigt unter einem gleichmässigen Winkel von 7° an. In welcher Höhe überfliegt das Flugzeug einen 28 km entfernten Punkt Q ?
- Einem Kreis mit dem Radius $r = 6 \text{ cm}$ ist ein regelmässiges Achteck einbeschrieben. Berechnen Sie dessen Umfang.

Lösungen

1.

a) Der Schnittpunkt liegt etwa bei $S(0,71,3)$



b) Einsetzungsverfahren: $y = -2,5(0,5y) + 3 \rightarrow y = 4/3 \rightarrow x = 2/3 \rightarrow L = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right)$

2. $\sqrt{4y+1} = 7-2y \rightarrow 4y+1 = (7-2y)^2 = 49-28y+4y^2 \rightarrow 0 = 4y^2 - 32y + 48$

\rightarrow Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$\rightarrow L = \{2\}$ (6 ist keine Lösung der Wurzelgleichung \rightarrow Probe!)

3. Es gilt (1) $x^2 + y^2 = 12^2$ und (2) $\frac{xy}{2} = 34,56 \rightarrow$ (2) nach y auflösen \rightarrow Einsetzungsverfahren $\rightarrow x^4 - 144x^2 + 4777,5744 = 0 \rightarrow$ Substitution $z = x^2 \rightarrow$ Lösungsformel und Resubstitution \rightarrow Die Seiten betragen 9,6 cm und 7,2 cm.

4. $f(x) = x^2 + (24-x)^2 = 2x^2 - 48x + 576 = 2(x-12)^2 + 288 \rightarrow S(12/288) \rightarrow$ Das Minimum wird angenommen, wenn die Zahl 24 in $12 + 12$ zerlegt wird und beträgt 288.

5. $u^{2n+3}v^{-3}$

6. $\left(a^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$

7. $\frac{12!}{(12-10)!} = 239500800$ Möglichkeiten

8. $1 - \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = 1 - \frac{1}{126} = \frac{125}{126}$

$$9. E(X) = -10 \cdot \frac{19}{37} + 10 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{10}{37}$$

$$V(X) = \left(-10 + \frac{10}{37}\right)^2 \cdot \frac{19}{37} + \left(10 + \frac{10}{37}\right)^2 \cdot \frac{18}{37} \approx 99,927 \rightarrow \sqrt{v(x)} \approx 9,996$$

$$10. \binom{12}{10} \cdot 0,85^{10} \cdot 0,15^2 = 0,292 \rightarrow \text{ca. } 29,2\% \text{ Wahrscheinlichkeit}$$

11.

a) $10 \cdot 1,05^{185} = 83180,27 \text{ Fr.} \approx 83180,25 \text{ Fr.}$

b) $500000 = 10 \cdot a^{185} \rightarrow a = 1,06023 \rightarrow \text{um ca. } 6\%$

12. Wachstumsfaktor: $a = 0,99988 \rightarrow 0,99988^x = 0,5 \rightarrow x = \log(0,5)/\log(0,99988) = 5775,88 \rightarrow \text{etwa } 5776 \text{ Jahre}$

13. $s = 23,32 \text{ cm} \rightarrow \text{Strahlensatz: } s/r = s_1/r_1 \rightarrow 23,32/12 = 8/r_1 \rightarrow r_1 = 4,12 \text{ cm}$

$\rightarrow h_1 = 6,86 \text{ cm} \rightarrow V = 121,7 \text{ cm}^3 \rightarrow 121,7 \text{ ml}$

14. $V = 4000 \text{ cm}^3; d = 19,69 \text{ cm}; O = 1218,59 \text{ cm}^2$

15. $\tan 7^\circ = h/28000 \text{ m} \rightarrow h = 3438 \text{ m}$

16. Wenn man vom Kreismittelpunkt zu jeder Ecke des Achtecks den Radius einzeichnet, so entstehen 8 gleichschenklige Dreiecke mit dem Mittelpunktswinkel 45° . Zeichnet man die Höhe zur Basis in eines dieser Dreiecke ein, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke und der Mittelpunktswinkel wird halbiert auf $22,5^\circ$.

$\rightarrow \sin 22,5^\circ = x/6 \rightarrow x = 2,3 \text{ cm (halbe Achteckseite)} \rightarrow U = 36,74 \text{ cm.}$